Développement : Injectivité de la transformation de FOURIER

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [EA] EL AMRANI M., *Analyse de* FOURIER *dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*, ellipses, 2008, p115.
Pour la transformée de FOURIER de la gaussienne : p156.
Pour les leçons :
- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 250 : Transformation de FOURIER. Applications.

Le but de ce développement est de montrer que la transformation de FOURIER est injective sur $L^1(\mathbb{R})$. On définit l'application *transformation de* FOURIER comme suit :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Lemme 1. ***Transformée de* FOURIER *de la gaussienne.***

Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\gamma_{1/a}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

PREUVE : Soit $\xi \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma_a}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-ix\xi}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2+\frac{\xi^2}{4a^2}\right)}\mathrm{d}x \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour $R > 0$, on note $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R$, R, $R + i\dfrac{\xi}{2a}$, $-R + i\dfrac{\xi}{2a}$, parcouru dans le sens direct. On a :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2}i\mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2}i\mathrm{d}t$$

On note $I_1(R)$, $I_2(R)$, $I_3(R)$, $I_4(R)$ les intégrales à droite de l'égalité, dans l'ordre.

$\longrightarrow \lim\limits_{R\to+\infty} I_1(R) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

$\longrightarrow |I_2(R)| \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}\mathrm{d}t = e^{-aR^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\mathrm{d}t \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\longrightarrow$ De même, $\lim\limits_{R\to+\infty} I_4(R) = 0$.

$\longrightarrow$ On a que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x$ converge absolument, donc :

$$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Maintenant, la fonction $z \longmapsto e^{-az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (qui est convexe) et $\Gamma(R)$ est fermé. Donc :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\mathrm{d}z = 0.$$

En rassemblant tous ces résultats, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Repartant de (1), on a donc :

$$\widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

ce qui achève la preuve. □

Théorème 2. ***Injectivité de la transformation de* FOURIER.**

L'application $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.

PREUVE : Déjà, $\mathcal{F}$ est linéaire. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \equiv 0$, et montrons que f est nulle presque partout.
Soient $s > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} \quad ; \quad g_s(x) = e^{iax}\gamma_s(x).$$

D'une part, par translation puis parce que $\widehat{\gamma_s}$ est paire, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}_s(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\gamma_s}(x-a)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\gamma_s}(a-x)\mathrm{d}x \\
&= f * \widehat{\gamma_s}(a) \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} f * \gamma_{\frac{1}{s}}(a),
\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent.
D'autre part, comme $\hat{f} \equiv 0$ et $g_s \in L^1(\mathbb{R})$, d'après la formule de dualité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}_s(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g_s(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Donc :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\frac{2\pi}{s}} f * \gamma_{\frac{1}{s}}(a) = 0.$$

$(\gamma_{1/s})_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Donc :

$$0 = \lim_{s\to+\infty} \|f * \gamma_{1/s} - f\|_1 = \lim_{x\to+\infty} \|f\|_1 = \|f\|_1,$$

ce qui prouve que f est nulle presque partout, et cela achève la preuve. □

Remarques 3.

[1] Si on avait la formule d'inversion de connue, on aurait pu retrouver l'injectivité de la transformation de FOURIER. En effet, si $\mathcal{F}f \equiv 0$, il suffit d'appliquer la formule d'inversion pour trouver que f est nulle presque partout.
[2] Avoir une idée de la preuve du fait que $(\gamma_{1/s})_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ est un plus. Voici quelques bribes d'arguments, si $s > 0$:
- En considérant $\gamma_{1/s}$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 (intégrale de GAUSS) ;
- Elle est positive, donc $\sup_{s>0} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{1/s}(x)\mathrm{d}x = \sup_{s>0} 1 = 1 < +\infty$;
- Si $\delta > 0$, une application du théorème de convergence dominée (provenant d'un théorème de croissances comparées) permet d'écrire que $\lim_{s\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |\gamma_{1/s}(x)|\mathrm{d}x = 0$.
En fait, la famille d'applications $(\gamma_{1/s})_{s>0}$ est appelée *noyau de la chaleur*.

On peut généraliser tous ces résultats dans $\mathbb{R}^d$.